УДК 004.932

СЕМЕЙСТВО ОБОБЩЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ХААРА

Лабунец В.Г., Федорова Т.С.[1], Остхаймер Е.[2]

[1] Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

[2] Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

Аннотация — В данной работе вводится новый ряд обобщений классических непрерывных и дискретных преобразований Хаара. Они основываются на нескольких математических моделях: -ичные отрезки и группы k-ичных чисел, функции, ассоциированные с группой перестановок и с абелевыми группами. Мы показываем, что существует большое множество обобщений классических функций Хаара, каждое из которых является полной системой ортогональных функций и образует базис в заданном пространстве.

THE FAMILY OF THE GENERALIZED HAAR'S TRANSFORMATIONS

Labunets V.G., Fedorova T.S.[1], Ostheimer E.[2]

[1] Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

[2] Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

Abstract — In this work a new series of generalizations classical continual and discrete transformations of Haaris entered. They are based on several mathematical models: k -thspieces and groups k -ths numbers, the functions associated with group of shifts and with Abelian groups. We show there are a lot of generalizations of classical functions of Haar, each of which is the complete set of orthogonal functions and forms basis in the given space.

I. Введение

В 1909 году знаменитый венгерский математик А.Хаар в своей диссертации построил систему ортогональных функций $\{Haar_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, определенных на интервале $[0,1]$. Это была первая ортогональная система со следующим замечательным свойством: любая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $f(t)$ разлагается в равномерно сходящийся рад по функциям системы $\{Haar_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)Haar_k(t)$$

Функции $Haar_k(t)$ называют классическими функциями Хаара. В дальнейшем функции Хаара исследовались во многих работах Большинство из них связано с теорией ортогональных рядов. В последние десятилетие функции Хаара находят широкое применение в цифровой обработке сигналов.

В зависимости от математической модели различают два вида преобразования Хаара — непрерывное и дискретное. В случае непрерывного преобразования говорят о двоичных отрезках.

Определение 1. Двоичными называют такие отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезка $[0,1]$ на 2^n равных частей для произвольного $n\in\mathbb{N}$, то есть

$$l_{2^n,j}=\left[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}\right),$$

где jменяется от 0 до 2^n-1, а $n=0,1,2,\ldots$ (в случае $j=2^n-1$ $l_{n,j}$ замкнут также справа).

Функции Хаара кусочно-постоянны на двоичных отрезках. Мы будем считать все эти отрезки замкнутыми слева и открытыми справа, если их правый конец отличен от 1, в противном случае отрезок замкнут также справа. Таким образом, двоичные отрезки это отрезки следующего вида:

$$\begin{aligned}
&l_{2^0,0}=[0,1], && n=0,\\
&l_{2^1,0}=\left[0,\frac{1}{2}\right),l_{2^1,1}=\left[\frac{1}{2},1\right], && n=1,\\
&l_{2^2,0}=\left[0,\frac{1}{4}\right),l_{2^2,1}=\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),l_{2^2,2}=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right),l_{2^1,3}=\left[\frac{3}{4},1\right], && n=2.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Левую и правую половины двоичного отрезка $l_{2^n,j}$ удобно обозначить $l^0_{2^n,j}$ и $l^1_{2^n,j}$, так что $l^0_{2^n,j}\cup l^1_{2^n,j}=$ $=l_{2^n,j}$. Нетрудно проверить, что

$$l^0_{2^n,j}=l_{2^{n+1},2j},l^1_{2^n,j}=l_{2^{n+1},2j+1}$$

Систему функций Хаара

$$\{Haar_{2^n,j}(t)\}_{m=0,j=0}^{\infty,2^m-1}$$

удобно строить группами: группа с номером m содержит 2^m функций Хаара.

Определение 2. Системой нормированных функций Хаара называется следующая совокупность функций:

$$\overline{Haar}_{0,0}(t)\equiv 1,$$

$$\overline{Haar}_k(t)=\overline{Haar}_{2^n,j}(t)=\begin{cases}2^{\frac{m-1}{2}}, & npu\ t\in l^0_{2^n,j},\\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & npu\ t\in l^1_{2^n,j},\\ 0, & npu\ t\in l_{2^n,j}\end{cases}\qquad(2)$$

Теорема 1. Функции Хаара образуют полные ортонормированную и ортогональную системы функций в пространстве $\mathbb{L}_\text{p}[0,1]$**:**

$$\int_0^1\overline{Haar}_k(t)Haar_{k'}(t)dt=\delta_{kk'},$$

$$\int_0^1\overline{Haar}_k(t)Haar_{k'}(t)dt=2^n\delta_{kk'}.$$

Доказательство: Докажем только ортогональность, доказательство полноты можно найти в работе [1].Если обе функции принадлежат одной группе, то легко видеть, что произведение $\overline{Haar_k}(t)\overline{Haar_{k'}}(t) = 0$. Если $k' = 1, k > 1$, то

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k(t)\overline{Haar}_{k'}(t)dt = \int_0^1 \overline{Haar}_k(t)dt = \int_{l_{2^n}} \overline{Haar}_k(t)dt = 0$$

Пусть теперь обе функции принадлежат разным группам: $k = (2^n, j), k' = (2^{n'}, j')$. Если $l_{2^n,j}$не содержится в $l_{2^{n'},j'}$, то снова $\overline{Haar_k}(t)\overline{Haar_{k'}}(t) = 0$. Если же $l_{2^n,j} \subset l_{2^{n'},j'}$, то либо $l_{2^n,j} \subset l^0_{2^{n'},j'}$, либо $l_{2^n,j} \subset l^1_{2^{n'},j'}$. И тогда

$$\int_0^1 \overline{Haar}_k(t)\overline{Haar}_{k'}(t)dt = \int_{l_{2^n,j}} \overline{Haar}_{2^n,j}(t)\overline{Haar}_{2^{n'},j'}(t)dt =$$

$$= \pm 2^{\frac{m-1}{2}} \int_{l_{2^n,j}} \overline{Haar}_{2^n,j}(t)dt = 0.$$

Докажем теперь, что функции Хаара $\overline{Haar_k}(t)$ нормированы:

$$\int_0^1 \overline{Haar}^2_k(t)dt = 1$$

При $k = 1$ это очевидно. Если же $k > 1$, то из (2) следует

$$\int_0^1 \overline{Haar}^2_{mj}(t)dt = \int_{l_{mj}} \overline{Haar}^2_{mj}(t)dt = 2^m \left|l_{mj}\right| = 1.$$

Таким образом, любую функцию $f(t) \in \mathbb{L}_2(0,1)$ можно разложить в ряд Хаара.

$$f(t) = \sum_{m=0} \sum_{j=0}^{2^m-1} F_{m,j} Haar_{2^m,j}(t) + F_{0,0} Haar_{0,0}(t), \qquad (3)$$

где

$$F_{m,j} = \int_0^1 f(t) Haar_{2^m,j}(t)dt. \qquad (4)$$

Довольно часто функции Хаара определяют не на конечном целочисленном отрезке $[0, 2^n - 1]$, а на группе $\boldsymbol{Z}_2^n = \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}_2$, которая считается вложенной в этот отрезок. Таким путем получают дискретные преобразования Хаара.

Целочисленные двоичные отрезки можно ввести по аналогии с (1):

$$l^n_{m,j} = \left[j2^{n-m+1}, (j+1)2^{n-m+1} - 1\right],\ m = 1,2,\ldots,n,\ j = 0,1,\ldots,2^m - 1$$

Рассмотрим теперь двоичные разложения чисел от 0 до 2^n. Для наглядности возьмем конкретный пример. Пусть $n = 3$. Тогда все числа $t \in \{0,1,2,\ldots,7\}$ можно записать в виде трехразрядных двоичных чисел $t = (t_3, t_2, t_1)$:

$$\begin{array}{ll} & 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7 \\ t_3 & \underbrace{0\ \ 1}\ \underbrace{0\ \ 1}\ \underbrace{0\ \ 1}\ \underbrace{0\ \ 1} \\ t_2 & \underbrace{0\ \ 0\ \ 1\ \ 1}\ \underbrace{0\ \ 0\ \ 1\ \ 1} \\ t_1 & \underbrace{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1} \end{array}$$

Из этого представления видно, что двоичные отрезки совпадают с периодами разрядов t_3, t_2, t_1 т.е.

$$l_{mj} = T^j(t_m),$$

где $T^j(t_m) - j$-ый период m-го разряда, состоящий из двух полупериодов ${}^0T^j(t_m)$ и ${}^1T^j(t_m)$:

$$T^j(t_m) = {}^0T^j(t_m) + {}^1T^j(t_m).$$

Дискретные функции Хаара можно определить следующим образом:

$$haar_{0,0}(t) = 1$$

$$haar_{m,j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & t \in l^0_{mj} = {}^0T^j(t_m), \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & t \in l^1_{mj} = {}^1T^j(t_m). \end{cases}$$

При каждом фиксированном значении nможно построить квадратную $2^n \times 2^n$-матрицу Хаара, записав функции $haar_{m,j}(t)$ в виде ее строк.

Ниже перечислены некоторые свойства системы Хаара:

1) Система Хаара полна в $\mathbb{L}_\mathrm{p}[0,1]$ при любом $p \in [0,\infty]$, где $\mathbb{L}_\mathrm{p}[0,1]$ – пространство всех функций с нормой

$$\|f\|_p = \left[\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (5)$$

Это означает, что в $\mathbb{L}_\mathrm{p}[0,1]$ нет такой функции, которая была бы ортогональна ко всем $Haar_{m,j}(t)$ и не равнялась бы почти во всех точках нулю.

2) Система Хаара образует базис в $\mathbb{L}_\mathrm{p}[0,1]$ при любом $p \in [0,\infty]$. Это означает, что для каждой функции $f(t) \in \mathbb{L}_p[0,1]$ряд Фурье-Хаара сходится к ней по норме:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f(t) - \sum_{k=0} F_k Haar_k(t) \right\|_p = 0 \qquad (6)$$

3)Для каждой функции $f(t) \in \mathbb{L}_p[0,1]$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 = \int_0^1 f^2(t)dt. \qquad (7)$$

4)Система Хаара является системой сходимости. Это означает, что если числа $\{F_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 < \infty$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} F_k Haar_k(t)$ сходится почти всюду во всех точках отрезка $[0,1]$.

5) Через функции Хаара довольно просто выражаются некоторые системы функций.

Пример 1. Система Радемахера $\{Rd_m(t)\}$, $m \in$ □ состоит из функций

$$Rd_m(t) = sign\left(\sin 2^m \pi t\right),\ \ где 0 \le t \le 1,\ \ m = 1,2,\ldots$$

и при $m \ge 1$ во всех точках непрерывности

$$Rd_m(t) = 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=0}^{2^{m-1}} Haar_{m,j}(t) - \frac{m-1}{2}.$$

В целом, если сравнивать матрицы Уолша, Хаара и Радемахера, то можно найти связь между этими функциями:

$$Haar_{m,j}(t) = \begin{cases} Wal_{0\ldots\alpha_m\ldots0}(t), & t \in l_{mj} = T^j(t), \\ 0, & t \notin l_{mj} = T^j(t), \\ Wal_{0\ldots\alpha_m\ldots0}(t) = Rd_m(t). & \end{cases}$$

Такое определение функций Хаара допускает их естественное обобщение на тот случай, когда вместо функций Радемахера и Уолша берутся обобщенные функции Радемахера и Уолша.

II. K-функции Хаара и k-преобразование Хаара

Наиболее простое обобщение функций Хаара получается в том случае, когда мы начинаем рассматривать k-ичные отрезки и функции Радемахера группы k-ичных чисел. K-ичные отрезки – это такие отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезков $[0,1]$ и $[0,k^n-1]$ на k^m равных частей. Например,

$$[0,1], \qquad m=0$$

$$\left[0,\frac{1}{k}\right),\ \left[\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right),\dots,\left[\frac{k-1}{k},1\right], \qquad m=1$$

$$\left[0,\frac{1}{k^2}\right),\ \left[\frac{1}{k^2},\frac{2}{k^2}\right),\dots,\left[\frac{k^2-1}{k^2},1\right], \qquad m=2$$

....

k-ичные отрезкиединичного отрезка и

$$\left[0,k^n-1\right], \qquad m=0$$

$$\left[0,k^{n-1}-1\right],\left[k^{n-1},2k^{n-1}-1\right],\dots,\left[(k-1)\cdot k^{n-1},k\cdot k^{n-1}-1\right], \qquad m=1$$

....

k-ичные отрезки дискретного отрезка $[0,k^n-1]$.

Для k-ичных отрезков введем следующие обозначения:

$${}_kL_{m,j}=\left[jk^{-m+1},(j+1)k^{-m+1}\right],$$

$${}_{k^n}l_{m,j}=\left[jk^{n-m+1},(j+1)k^{n-m+1}-1\right],$$

где *j*меняется от *0* до $k^{m-1}-1$, а $m=1,2,\dots,n$ в первом и $m=1,2,\dots,n$ - во втором случаях.

Легко видеть, что при каждом m

$${}_kL_{m,0}\cup{}_kL_{m,1}\cup{}_kL_{m,2}+\dots+{}_kL_{m,k^m-1}=[0,1],$$

$${}_{k^n}l_{m,0}\cup{}_{k^n}l_{m,1}\cup{}_{k^n}l_{m,2}+\dots+{}_{k^n}l_{m,k^m-1}=\left[0,k^n-1\right].$$

Отрезки ${}_kL_{m,j}$ и ${}_{k^n}l_{m,j}$ бывает удобно разбить на *k*равных частей $\left\{{}_kL^s_{m,j}\right\}_{s=0}^{k-1}$ и $\left\{{}_{k^n}l^s_{m,j}\right\}_{s=0}^{k-1}$ так, что

$${}_kL^0_{m,j}+{}_kL^1_{m,j}+\dots+{}_kL^{k-1}_{m,j}=\sum_{s=0}^{k-1}{}_kL^s_{m,j}={}_kL_{m,j},$$

$${}_{k^n}l^0_{m,j}+{}_{k^n}l^1_{m,j}+\dots+{}_{k^n}l^{k-1}_{m,j}=\sum_{s=0}^{k-1}{}_{k^n}l^s_{m,j}={}_{k^n}l_{m,j}.$$

Систему *k*-функций Хаара $\left\{{}_kHaar^r_{m,j}(t)\right\}_{j=0,r=0}^{k^{m-1}-1,k-1}$ удобно строить группами: группа с номером m содержит $k^{m-1}(k-1)$ функций ${}_kHaar^r_{m,j}(t)$, где индекс *j*означает сдвиг носителя ${}_kL_{m,j}$ функции ${}_kHaar^r_{m,0}(t)$ на расстояние $\frac{j}{k^{m-1}}$ от начала координат.

Определение 3. K-базисом ортогональных непрерывных функций Хаара называется следующая совокупность функций

$$\begin{cases}{}_kHaar_0(t)={}_kHaar^0_{0,1}(t)\equiv 1\\[2mm] {}_kHaar^r_{m,j}(t)=\begin{cases}\varepsilon^{rs},\ t\in{}_kL^s_{m,j},\\ 0,\quad t\notin{}_kL^s_{m,j},\end{cases}\end{cases} \tag{8}$$

где $\varepsilon=\sqrt[k]{1}$, а r меняется от *1* до $k-1$.

Очевидно, что

$${}_kHaar^r_{m,j}(t)={}_kHaar^r_{m,0}\left(t+\frac{j}{k^{m-1}}\right).$$

Теорема 2.Множество функций ${}_kHaar^r_{m,j}(t)$ образуют в пространстве $\mathbb{L}_p[0,1]$ ортогональную систему функций:

$$\int_0^1{}_kHaar^r_{m,j}(t)\,{}_kHaar^{r_1}_{m_1,j_1}(t)\,\mathrm{dt}=\frac{1}{k^{m-1}}\delta_{mm_1}\delta_{jj_1}\delta_{\alpha\alpha_1}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Для построения дискретных функций Хаара воспользуемся конечными группами $\boldsymbol{Z}^n_k=\boldsymbol{Z}_k\oplus\boldsymbol{Z}_k\oplus\dots\oplus\boldsymbol{Z}_k$ и целочисленными k-ичными отрезками

$${}_{k^n}l_{m,j}={}_{k^n}T_j(t_m),\quad m=1,2,\dots,n,\quad j=0,1,\dots,k^{m-1}-1,$$

представленными j-ми периодами m-ых разрядов t_m числа t в k-ичной системе счисления.

Определение 4. K-базисом ортогональных дискретных функций Хаара называется следующая совокупность функций

$$\begin{cases}{}_khaar^0_{0,0}(t)\equiv haar_0(t)\equiv 1,\\[2mm] {}_{k^n}haar^r_{m,j}(t)=\begin{cases}\varepsilon^{rt_m},\ t\in{}_{k^n}T_j(t_m),\\ 0,\quad t\notin{}_{k^n}T_j(t_m).\end{cases}\end{cases} \tag{9}$$

Всю совокупность дискретных функций Хаара удобно представить в виде квадратной $\left(k^n\times k^n\right)$-матрицы Хаара, записав функции ${}_{k^n}haar^r_{m,j}(t)$ в виде ее строк.

Пример 2. При $n=2$ и $k=3$, $\varepsilon=\sqrt[3]{1}$ матрица Хаара имеет вид

$$H_{3^2}=\left[{}_{k^n}haar^r_{m,j}(t)\right]=\begin{bmatrix}haar^0_{0,0}(t)\\ \hline haar^1_{1,0}(t)\\ haar^2_{1,0}(t)\\ \hline haar^1_{2,0}(t)\\ haar^1_{2,1}(t)\\ haar^1_{2,2}(t)\\ \hline haar^2_{2,0}(t)\\ haar^2_{2,1}(t)\\ haar^2_{2,2}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon^2\\ 1&1&1&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon^2&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon\\ 1&\varepsilon&\varepsilon^2&&&&&&\\ &&&1&\varepsilon&\varepsilon^2&&&\\ &&&&&&1&\varepsilon&\varepsilon^2\\ 1&\varepsilon^2&\varepsilon&&&&&&\\ &&&1&\varepsilon^2&\varepsilon&&&\\ &&&&&&1&\varepsilon^2&\varepsilon\end{bmatrix}$$

Из приведенного примера ясна роль индексов $m,\ j,\ r$, а именно: групповой номер m определяет длину дискретного интервала

$${}_kT_j(t_m)=\frac{k^n}{k^{m-1}},$$

на котором функция не равна нулю, а j - его положение на целочисленном отрезке $[0,k^n-1]$. Наконец, последний подрупповой индекс r означает степень экспоненты.

Матрица H_{3^2} строится достаточно просто по числам (t_1,t_2) троичного разложения чисел $t=0,1,2,\dots,3^2-1$:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
t_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Первая функция $haar_{1,0}^{1}(\mathrm{t})$ из группы функций с номером $m=1$ имеет у ε в качестве показателя числа $1\cdot t_1$ (когда t меняется от 0 до 8). Вторая функция $haar_{1,0}^{2}(\mathrm{t})$ имеет в качестве показателей числа $2\cdot t_1$. Числа t_2 повторяются периодически три раза при изменении t от 0 до 8. Вторая группа функций Хаара $(m=2)$ отличается от нуля только на одном периоде: первая функция первой погруппы $haar_{2,0}^{1}(t)$ - на первом периоде, вторая функция $haar_{2,1}^{1}(t)$ этой подгруппы – на втором, третья $haar_{2,2}^{1}(t)$ - на третьем и т.д. Причем в качестве показателей степеней у ε в данной группе функций выступают числа $1\cdot t_2$. Затем идет аналогичная тройка функций с подрупповым номером $r=2$, имеющих в качестве показателей у ε числа $2\cdot t_2$.

Если бы мы взяли значения $k=3$ и $n=3$, то в таком случае матрица Хаара имела бы размерность $\left(3^3\times 3^3\right)$. Аналогично как и в предыдущем случае $(n=2,\ k=3)$, такую матрицу можно построить по числам (t_1,t_2,t_3) троичного разложения числа $t=0,1,2,...,3^3-1$.

Наряду с тройной нумерацией (m,r,j) функций Хаара используют и одноиндексную нумерацию: функции $haar_{m,j}^{r}(t)$ приписывают один номер, который записывают в виде n-разрядного числа в системе счисления с основанием k:

$$\alpha=k^{m-1}\cdot r+j=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n). \tag{10}$$

Напомним, что здесь m меняется от *1* до *n*, r от *1* до $k-1$ и j от 0 до $k^{m-1}-1$. Для примера 2 соответствие (10) имеет вид:

m	r	j	$\to \alpha =$	$(\alpha_1$	$\alpha_2)$
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	2	0	2	0	2
2	1	0	3	1	0
2	1	1	4	1	1
2	1	2	5	1	2
2	2	0	6	2	0
2	2	1	7	2	1
2	2	2	8	2	2

При такой нумерации можно дать следующее определение функциям Хаара.

Определение 5. Функции

$$\begin{cases} haar_{00...0}(t)\equiv 1, \\ haar_{0...\alpha_{n-m+1}...\alpha_n}(t)=\begin{cases}\chi_{0...\alpha_{n-m+1}...0}\left(t_1,...,t_n\right)=\varepsilon^{\alpha_{n-m+1}t_m}, & t\in T_j(t_m), \\ 0, & t\notin T_j(t_m).\end{cases}\end{cases}$$

или, что тоже самое,

$$\begin{cases} haar_0(t)\equiv 1, \\ haar_\alpha(t)=\begin{cases}\chi_{0...\alpha_{n-m+1}...0}\left(t_1,...,t_n\right)=\varepsilon^{\alpha_{n-m+1}t_m}, & \left(\alpha_{n-m+2},...,\alpha_n\right)=\left(t_1,...,t_{m-1}\right), \\ 0, & \left(\alpha_{n-m+2},...,\alpha_n\right)\neq\left(t_1,...,t_{m-1}\right).\end{cases}\end{cases}$$

называются дискретными k-функциями Хаара, где $\chi_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$ - характеры группы $\boldsymbol{Z}_k^n$, α_{n-m+1} - первый слева ненулевой разряд n-разрядного k-ичного числа $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha$ и $t=(0,...,\alpha_{n-m+2},...,\alpha_n,\alpha_{n-1})$ - k-ичное разложение числа j в $T_j(t_m)$. В этом определении подразумевается существование *n+1*-го разряда $\alpha_{n+1}=0$ у числа $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$ и нулевого $t_0=0$ у $t=\left(t_0,t_1,t_2,...,t_n\right)=\left(0,t_1,t_2,...,t_n\right)$.

Довольно часто в литературе функциями Хаара называют несколько иные функции. Будем называть их функциями Хаара с меткой π для того, чтобы отличать от классических функций Хаара.

Определение 6.Функции

$$\begin{cases} {}_\pi Haar_{00...0}(t)\equiv 1, \\ {}_\pi Haar_\alpha(t)={}_\pi Haar_{0...\alpha_{n-m+1}...\alpha_n}(t)= \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\varepsilon^{\alpha_m t_m},\left(t_1,...,t_n\right),\left(\alpha_{n-m+2},...,\alpha_{n+1}\right)=\left(t_{n-m+2},...,t_{n+1}\right), \\ 0, \quad \left(t_1,...,t_n\right),\left(\alpha_{n-m+2},...,\alpha_{n+1}\right)\neq\left(t_{n-m+2},...,t_{n+1}\right).\end{cases}$$

называются k-функциями Хаара с меткой π. Здесь $\alpha_{n+1}\equiv t_{n+1}\equiv 0$.

III. Функции Хаара, ассоциированные с группой перестановок

Наряду с системами k-функций Хаара можно определить еще целый ряд ортогональных функций, обладающих схожими свойствами. Пусть S_n - симметрическая группа подстановок, действующая на номерах разрядов числа $t=\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$, т.е. на множестве $\{1,2,...,n\}$.

Если

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n\end{pmatrix},$$

то положим $\sigma t=\sigma\left(t_1,t_2,...,t_n\right)=\left(t_{j_1},t_{j_2},...,t_{j_n}\right)$.

Пусть $x(t)$ - функция, заданная на группе $\boldsymbol{Z}_k^n$. Тогда преобразование аргумента t под действием σ порождает некоторое линейное преобразование $P(\sigma)$ функции $x(t)$:

$$x(\sigma t)=P(\sigma)x(t).$$

Ясно, что $P(\sigma)$ является k^n-мерным представлением S_n.

Если функции Хаара представлены матрицей Хаара, то действие группы S_n порождает некоторую перестановку ее столбцов. Пусть, например, $k=3$ и $n=2$. Тогда все числа от 0 до 8 представляются в виде двухразрядного числа $t=\left(t_1,t_2\right)$. Если, например, $\sigma(t)=\sigma(t_1,t_2)=(t_2,t_1)$, то такая перестановка разрядов порождает следующую перестановку столбцов

$$\eta=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

Для каждого $\sigma\in S_n$ множество $\left\{haar_\alpha(\sigma t)\right\}=\left\{{}_\sigma haar_\alpha(t)\right\}$ является полной системой ортогональных функций на отрезке $[0,k^n-1]$. Эти функции обладают следующими свойствами:

1. ${}_\sigma haar_\alpha(t)\equiv 1,$

2. Все функции ${}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)$ принимают значения из множества $\{0,1,\varepsilon,...,\varepsilon^{k-1}\}$,

3. Норма функции ${}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)$ равна k^{j}, где j - номер первой слева нулевой компоненты вектора $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$,

4. Система функций $\{{}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)\}$ является ортогональным базисом пространства $\mathbb{L}(Z_k^n, C)$, поэтому любая функция $x(t) \in \mathbb{L}(Z_k^n, C)$ может быть представлена в виде линейной комбинации базисных функций:

$$x(t) = \sum_{\alpha=0}^{k^n-1} X(\alpha)\,{}_{\sigma}haar_{\alpha}(t), \tag{11}$$

где

$$X(\alpha) = k^{-n} \sum_{t=0}^{k^n-1} x(t)\,{}_{\sigma}haar_{\alpha}(t). \tag{12}$$

Множество функций $\{{}_{\sigma}haar_{\alpha}(t)\}$ для некоторого $\sigma \in S_n$ называют k-системой функций Хаара с отметкой σ.

Пример 3. Рассмотрим все функции Хаара с отметкой σ для случая $k = 2$ и $m = 3$. Так как $|S_3| = 6$, то будем иметь шесть различных систем функций:

$${}_{\sigma_0}H_{2^3} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{array}\right],$$

$${}_{\sigma_1}H_{2^3} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & & 1 & -1 \\ \hline 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{array}\right],$$

$${}_{\sigma_2}H_{2^3} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & & -1 & & -1 & \\ & 1 & & 1 & & -1 & & -1 \\ \hline 1 & & -1 & & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & & -1 \end{array}\right],$$

$${}_{\sigma_3}H_{2^3} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & & -1 & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & & -1 \end{array}\right],$$

$${}_{\sigma_4}H_{2^3} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & & 1 & & -1 & \\ & 1 & & -1 & & 1 & & -1 \\ \hline 1 & & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & -1 & \\ & 1 & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & & -1 \end{array}\right],$$

$$
{}_{\sigma_5}H_{2^3} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & & & -1 & -1 & & \\
& & 1 & 1 & & & -1 & -1 \\
\hline
1 & -1 & & & & & & \\
& & & & 1 & -1 & & \\
& & 1 & -1 & & & & \\
& & & & & & 1 & -1
\end{array}\right],
$$

записанных соответственно для перестановок

$$
\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},
$$

$$
\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

IV. Функции Хаара, ассоциированные с абелевыми группами

Пусть $\boldsymbol{H}_{h_1, h_2, \dots, h_n} = \boldsymbol{Z}_{h_1} \oplus \boldsymbol{Z}_{h_2} \oplus \dots \oplus \boldsymbol{Z}_{h_n}$ - произвольная конечная коммутативная группа, а

$$\chi_\beta(t) = \chi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(t_1 t_2 \dots t_n) = \varepsilon_1^{\beta_1 t_1} \varepsilon_2^{\beta_2 t_2} \dots \varepsilon_n^{\beta_n t_n}$$

ее характеры.

Определим $\boldsymbol{H}_{h_1, h_2, \dots, h_n}$ -функции Хаара, подобные классическим k-функциям Хаара (см. определения 3, 4). Для этого необходимо ввести понятие $\boldsymbol{H}_{h_1, h_2, \dots, h_n}$ -отрезка.

Определение 7. $\boldsymbol{H}_{h_1, h_2, \dots, h_n}$ -отрезками будем называть отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезка $[0,1]$ на h_1 разных частей, или на $h_1 h_2$ частей, или на $h_1 h_2 h_3$ частей и т.д. вплоть до деления на $h_1 h_2 \dots h_{n-1}$ частей.

Аналогично можно делить целочисленный отрезок $[0, h-1]$.

Для $\boldsymbol{H}_{h_1, h_2, \dots, h_n}$ -отрезков введем следующие обозначения:

$$
{}_{h_1, h_2, \dots, h_n}\ell_{mj} = \left[\frac{jN}{h^{[1,m-1]}}, \frac{(j+1)N}{h^{[1,m-1]}} \right] =
$$

$$
= \left[jh^{[n,m-1]}, (j+1)h^{[n,m-1]} \right] = T^j(t_m)
$$

где $h^{[1,0]} \equiv 1, \ h^{[1,m-1]} := h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$,

$j = 0, 1, \dots, h^{[1,m-1]} - 1, \quad m = 1, 2, \dots, n.$

Пример 4. Пусть к примеру $\boldsymbol{H}_{2,3,\dots,4} = \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_3 \oplus \boldsymbol{Z}_4$. Тогда целочисленными отрезками будут:

$[0, 23]$;

$[0, 11], \ [12, 23]$; и

$[0, \ 3], \ [4, \ 7], \ [8, \ 11], \ [12, 15], \ [16, 19], \ [20, 23]$,

т.д. Их связь с периодами разрядов t_1, t_2, t_3 можно увидеть из следующих равенств:

$$
{}_{2,3,4}\ell_{1,0} = [0, 23] = T^0(t_1);
$$

$$
{}_{2,3,4}\ell_{2,0} = [0, 11] = T^0(t_2), \quad {}_{2,3,4}\ell_{2,1} = [12, 23] = T^1(t_2);
$$

$$
{}_{2,3,4}\ell_{3,0} = [0, \ 3] = T^0(t_3), \quad {}_{2,3,4}\ell_{3,1} = [4, \ 7] = T^1(t_3),
$$

$$
{}_{2,3,4}\ell_{3,2} = [8, 11] = T^2(t_3), \quad {}_{2,3,4}\ell_{3,3} = [12, 15] = T^3(t_3),
$$

$$
{}_{2,3,4}\ell_{3,4} = [16, 19] = T^4(t_3), \quad {}_{2,3,4}\ell_{3,5} = [20, 23] = T^5(t_3),
$$

где периоды $T^i(t_m)$ можно увидеть из следующей таблицы:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
t_3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
t_2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
t_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Определение 8. Множество функций

$$
\begin{cases}
haar_{0,0}^0(t) \equiv 1, \\
haar_{m,j}^\alpha(t) = \begin{cases} \chi_{0 \dots \alpha_m \dots 0}(t) = \varepsilon_m^{\alpha_m, t_m}, & t \in \ell_{mj} = T^j(t_m), \\ 0, & t \notin \ell_{mj} = T^j(t_m), \end{cases}
\end{cases}
$$

где j меняется от 0 до $h^{[1,m-1]}$, $m = 1, 2, \dots, n$, $\alpha = 1, 2, \dots, h_{m-1}$, $\varepsilon = \sqrt[h_m]{1}$ назовем **H**-функциями Хаара.

Из определения **H**-функций Хаара следует их ортогональность:

$$
\sum_{t=0}^{N-1} haar_{m_1, j_1}^{r_1}(t) haar_{m_2, j_2}^{r_2}(t) = \begin{cases} \dfrac{N}{h[1, m-1]}, & r_1 = r_2, \ m_1 = m_2, \ j_1 = j_2 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}
$$

Пример 5. Пусть $\boldsymbol{H}_{2,3,4} = \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_3 \oplus \boldsymbol{Z}_4$. Чтобы построить матрицу Хаара, воспользуемся числами $t = 0, 1, \dots, 23$ в системе счисления со смешанными основаниями 2,3,4 (см. пример 4) и заполним строки функциями Хаара.

$$
H_{(2,3,4)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \\
\hline
1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\
\hline
1 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 \\
\hline
1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & & & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & & & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & & & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & & & & \\
& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon
\end{array}\right]
$$

Структура данной матрицы и периодика чисел $t_1, \ t_2, \ t_3$ указывает на ту же связь между видом **H**-функций и поведением чисел t_1, t_2, t_3, что и в случае k-функций Хаара. Следует отметить, что порядок слагаемых в группе $\boldsymbol{H}_{h_1, h_2, \ldots, h_n}$ существенным образом влияет на вид **Н**-функций Хаара.

V. Заключение

Мы разработали новые теоретические основы непрерывных и дискретных преобразований Хаара, основанных на различных математических моделях. Главная цель работы – показать, что существует целое множество обобщенных преобразований Хаара, которые обладают теми же замечательными свойствами, что и классические функции Хаара, и в дальнейшем могут быть использованы для решения проблем цифровой обработки сигналов в эффективной манере.

Данная работа была поддержана центром повышения квалификации «Превосходство» Уральского федерального университета в области «Квантовые и видео информационные технологии: от компьютерного зрения к видео аналитике» (Согласно акту 211 Правительства Российской Федерации, договора 02.A03.21.0006).

VI. Литература

[1] DreminI.M.Waveletsandtheirapplications: обзорыактуальныхпроблем: 171 том № 5 / I.M. Dremin, O.V. Ivanov, V.A. Nechitailo, - Moskow: LebedevPhysicalInstitute, 2001 –37 с.